2.3.3 Fraktale und Seltsame Attraktoren

- Fraktale

Wesentliche Vorläufer bei der Erforschung von Fraktalen waren Georg **Cantor** (1872), Giuseppe **Peano** (1890), David **Hilbert** (1891), Helge **von Koch** (1904), Waclaw **Sierpinski** (1916), Gaston **Julia** (1918) und Felix **Hausdorff** (1919)./1/ 1975 führte **Mandelbrot** den Begriff fraktal (von frangere = brechen) ein, um seiner neuen Geometrie einen Namen zu geben. Benoit Mandelbrot/2/ entdeckte bei der Analyse von scheinbar zufälligen Veränderungen kurz- und langfristiger Baumwollpreise selbstähnliche Strukturen./3/ Dies veranlaßte ihn dazu, sich analytischer Probleme in geometrischen Formen bzw. Mustern anzunehmen. Er vermutete, daß es eine Geometrie zwischen den euklidischen Dimensionen gibt, die es uns ermöglicht, die vielfältigen Formen der Natur zu beschreiben. Da die euklidische Geometrie unregelmäßige Formen wie Wolken, Küstenlinien oder Gebirge nicht konstruieren kann, begann Mandelbrot über den Begriff der Dimension nachzudenken. Er kam zu dem Ergebnis, daß es neben den ganzzahligen Dimensionen 0, 1, 2, 3, 4... auch gebrochenzahlige ("fraktale") Dimensionen geben muß. Während die fraktale Dimension eines Punktes Null ist und die für einen stabilen begrenzten Kreis 1, haben komplexe Gebilde wie Wolken oder Berggrate gebrochenzahlige Dimensionen.

Das Besondere an fraktalen Strukturen ist, daß deren Kurven keine Tangenten haben und daß Unregelmäßigkeiten über verschiedene Maßstäbe hinweg stets konstant bleiben, was man auch als Skaleninvarianz bezeichnet. Künstliche Wolken, virtuelle Bäume und Mandelbrotmengen sind Beispiele für maßstabsunabhängige Phänomene, deren Dimension sich bei der Betrachtung verschiedener Maßstäbe nicht ändert. Fraktale offenbaren sowohl die ästhetischen Qualitäten des Chaos als auch dessen strukturelle Komplexität. Während die Chaosforschung vornehmlich Zeitphänomene behandelt werden, steht bei der fraktalen Geometrie die Komplexität und Selbstähnlichkeit räumlicher Strukturen im Mittelpunkt. Fraktale sind die Attraktoren eines deterministisch chaotischen Systems und entstehen aus einem Prozeß des Faltens und Entfaltens im Rahmen von dynamischen Abläufen rekursiver Gleichungen./4/ Falconer hat die typischen Merkmale eines Fraktals (hier Set F genannt) zusammengestellt:/5/

1. F hat eine feingliedrige Struktur, d.h. eine hohe Detaillierung in kleinen Maßstäben.

2. F ist zu irregulär, um es lokal und global mit der euklidischen Geometrie zu beschreiben.

3. F hat oftmals eine selbstähnliche Form.

4. Die fraktale Dimension von F ist meistens größer als seine topologische Dimension.

5. F ist meistens durch eine rekursive Formel beschreibbar.

Ein augenfälliges Beispiel für fraktale Phänomene ist die britannische Küstenlinie. Obwohl die Fläche Großbritanniens nicht unendlich groß ist, nähert sich die Länge der Küste bei immer weiterer Verfeinerung des Maßstabes gegen unendlich. Die fraktale Dimension der Küstenlinie von 1,5 bleibt über verschiedene Maßstäbe hinweg konstant und drückt hierbei aus, wie stark ihre Länge bei der Maßstabsverfeinerung wächst./6/ Liegt die fraktale Struktur einer Kurve oder Küstenlinie nahe bei 1, so ist die Küste sehr glatt und weist kaum feine Details auf. Je weiter sich die Zahl von 1 entfernt, desto unregelmäßiger, fraktaler wird die Küstenlinie, wobei sich die Selbstähnlichkeit in unterschiedlichen Skalen fortsetzt. Jede Verzweigung, wie jede Krümmung einer Küstenlinie, ist ein Punkt der Entscheidung./7/

Die fraktale Dimension läßt sich in Abhängigkeit der Teileanzahl a und einem Skalierungsfaktor s berechnen. Diese betragen beispielsweise für einen Kubus a=27 und s=3.0, so daß sich als fraktale Dimension nach dem Potenzgesetz a=sD für D=3 ergibt./8/ Als fraktale Dimension der Kochschen Schneeflocke (siehe Abbildung 2.36) ergibt sich bei a=4 und s=3.0 D=1,2628. Bei dieser wird ein endlich großer Flächeninhalt von einer unendlich langen Linie begrenzt./9/ Die Kochsche Schneeflocke wird konstruiert, indem man, ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck, jeweils in der Mitte einer jeden Seite ein neues Dreieck von einem Drittel der Seitengröße hinzufügt:

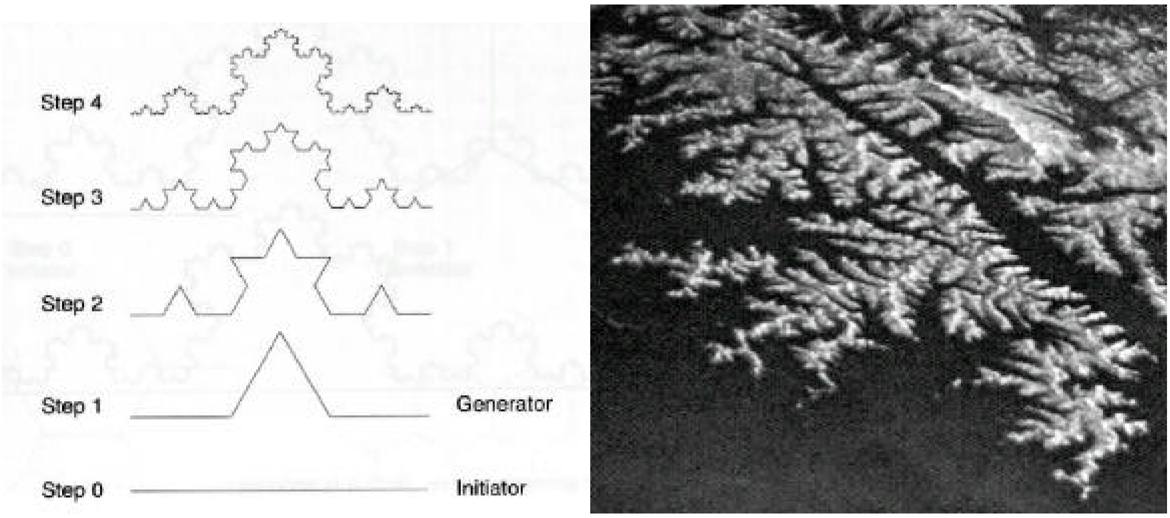

Abb. 2.36: Virtuelles Fraktal (Kochsche Schneeflocke) und natürliche fraktale Form/10/

Die Arbeit mit Fraktalen ist somit die Suche nach Strukturen im Chaos, nach Gesetzmäßigkeiten, die der Natur zugrunde liegen. Für Naturereignisse wie Blitze wurde eine Dimension von 1,3 errechnet./11/ Auch unser Universum als Ganzes scheint eine fraktale Dimension zwischen 1 und 2 zu besitzen./12/ Dagegen wurde für Protein-Oberflächen eine Dimension von 2,4 und für die zweidimensionale Oberfläche des menschlichen Gefäßsystems, das stark gekrümmt und gefaltet ist, eine fraktale Dimension von 3 errechnet./13/

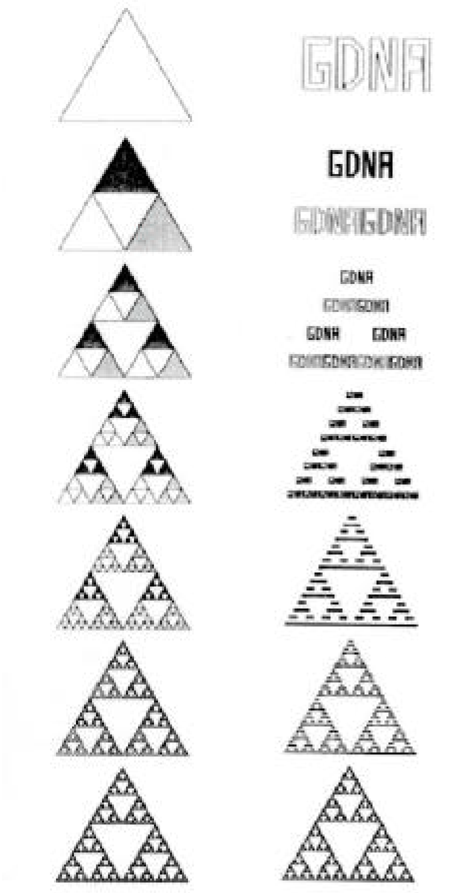

Abb. 2.37: Lineare Kopier-Maschine

Peitgen beschreibt die fraktale Geometrie als Geometrie des Chaos./14/ Er unterscheidet zwischen linearen Fraktalen wie der Kopier-Maschine und nichtlinearen Fraktalen wie der Mandelbrotmenge oder den Julia-Mengen. Die nichtlinearen Fraktale entfalten gegenüber den linearen wesentlich komplexere Muster. Bei der Kopier-Maschine (siehe Abbildung 2.37) führt trotz unterschiedlicher Ausgangssituation dieselbe rekursive Regel zu selbstähnlichen Strukturen. Fraktale Bäume verdeutlichen, daß die fraktale Geometrie ein Maß der Veränderung ist. Fraktale ermöglichen somit komplexe Strukturen durch rekursive Codierungen zu simulieren und bilden eine Theorie der Wahrnehmung sowie des Wandels.

Fraktalähnliche Strukturen, die von Benoit Mandelbrot als seltsame mathematische Kuriositäten entdeckt wurden, durchdringen die gesamte belebte und unbelebte Natur. Sie zeigen sich überall im Kosmos, an Gebirgszügen, Farnen, Küstenlinien, Zellstrukturen, der Verteilung der Galaxien im Universum, den komplexen Wettererscheinungen in unserer

Atmosphäre bis zu den Gefäßsystemen im menschlichen Körper. Die Natur kennt jedoch keine richtigen Fraktale, da die fraktalen Merkmale von Wolkengrenzen, topographischen Oberflächen, Küstenlinien oder Turbulenzen in Fluiden bei genügend kleinen Maßstäben verschwinden./15/ Doch obwohl die Natur kein Fraktal ist, kann diese durch Fraktale simuliert werden, wie die immer weniger von der physischen Wirklichkeit zu unterscheidenden virtuellen Bilder der VR-Technologie verdeutlichen (siehe Kapitel 1.3).

Ein berühmtes Beispiel für eine fraktale Struktur ist die sogenannte Fibionacci-Reihe. Hierbei wird eine Linie so geteilt, daß die beiden Abschnitte im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie der längere Abschnitt zur ganzen Linie, wobei das Verhältnis der beiden Abschnitte die irrationale Zahl 1,618 ergibt, die den Goldenen Schnitt repräsentiert. Dieselbe Zahl ergibt sich bei einer Zahlenreihe, wo jede Zahl aus der Summe der beiden vorigen berechnet wird: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.... Das Verhältnis von zwei nebeneinander liegenden Zahlen nähert sich ebenfalls dem des Goldenen Schnittes an, der nach Cramer die irrationalste aller irrationalen Zahlen repräsentiert./16/ Interessant ist der Goldene Schnitt auch deshalb, weil er bei der Spiralbildung in der Natur aber auch in der Architektur und der Kunst eine entscheidende Rolle für das Empfinden von Ästhetik spielt.

Da auch bestimmte Viren fraktale Oberflächen besitzen/17/, könnten zukünftige Fortschritte der Medizin hinsichtlich der Bekämpfung gefährlicher Krankheiten, wie AIDS, auch von der Fähigkeit abhängen, das fachübergreifende Wissen der Chaosforschung in andere Wissenschaftszweige zu integrieren. Die menschliche Lunge bringt ebenfalls eine ganze Reihe fraktaler Skalen hervor. Dadurch schafft es die Lunge, ein Maximum an Oberfläche bei endlichem Volumen für den Sauerstoffaustausch zu erzeugen. Der Mengersche Schwamm (siehe Abbildung 2.38) kann hierbei als ein Beispiel für das Aufbauprinzip der Lunge angeführt werden. Die Natur verwendet immer wieder Symmetrie und die Irregularität von Fraktalen, um ihre organischen Strukturen herauszubilden, welche von Briggs Biofraktale genannt werden./18/

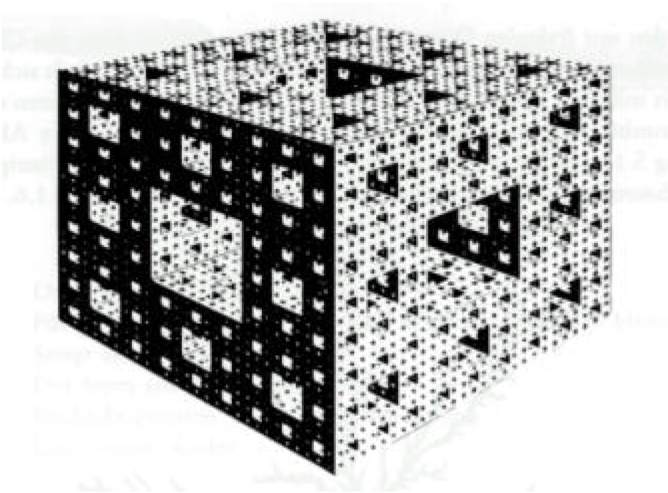

Abb. 2.38: Mengerscher Schwamm

Integriert man bei den iterativen Berechnungen von Fraktalen ein Zufallselement, so lassen sich Unregelmäßigkeiten imitieren, die die Darstellung von Gebirgszügen, Wolken oder Wellen erlauben./19/ Der Bruch der Symmetrie scheint ein wichtiges Prinzip der Natur für die Schöpfung neuer Formen zu sein. Dieses Zusammenspiel von Symmetrie und Chaos ist nicht nur für die Natur, sondern auch für die Kunst eine wesentliche Anforderung für das Hervorbringen von Innovationen.

Der dreidimensionale Raum galt lange als die einzig erlebbare Wirklichkeit, da sich Leben in der 1., 2. oder der 4. Dimension, ebenso wie in fraktalen Dimensionen, unserer Erfahrung entzieht. Dies änderte sich mit dem Siegeszug des Computers. In Modellwelten der Physiker lassen sich höherdimensionale Räume mit eigenen Spielregeln ersinnen. Einfache Regeln, die zu komplexen Strukturen führen, zeigen sich nicht nur bei Fraktalen, sondern auch bei Automaten (siehe Kapitel 2.3.4). In beiden Beispielen gilt es, durch Experimentieren mit bestimmten rekursiven Gleichungen oder einer bestimmten Gesetzmäßigkeit lokale Regeln zu finden, die zu einem globalen Aufbau komplexer Strukturen und Organisationen führen.

- Rekursivität

Fraktale werden durch nichtlineare Gleichungen, d. h. durch dynamische Prozesse generiert und entstehen aus rekursiven Formeln. Rekursion bedeutet, daß eine Formel immer wieder auf sich selbst angewendet wird. Ist eine solche Formel nichtlinear, können unerwartete Eigenschaften zu Tage treten. Rekursion ist ein Bereich, in dem "Gleichheit in der Verschiedenheit" eine zentrale Rolle spielt, wobei das "gleiche" Ereignis auf verschiedenen Ebenen zugleich auftritt./20/ Von besonderer Bedeutung für die Naturwissenschaften sind die komplexen Zahlen/21/ der Mathematik, weil diese die Berechnung schwieriger Problemstellungen ermöglichen./22/ Auch bei den Fraktalen offenbart sich deren Formenreichtum und Schönheit erst durch die Verwendung komplexer Zahlen/23/ in rekursiven Gleichungen. Ein besonders beeindruckendes Fraktal, die Mandelbrotmenge (siehe Abbildung 2.39) wird durch die iterative Anwendung nachfolgender nichtlinearer Gleichung gebildet, wobei Z eine komplexe Variable und C einen komplexen Parameter darstellt:/24/

Mandelbrotmenge: $Z = Z^2 + C$

Mandelbrot-Sets sind holistisch, da in jedem ihrer Teile die Beschreibung des Ganzen codiert ist. Vergrößerte Ausschnitte zeigen immer wieder ähnliche, nie jedoch gleiche Strukturen. Der Mathematiker John **Hubbard** bewies ein wichtiges Theorem über die Menge, nämlich daß alle am Rand befindlichen verkleinerten Mandelbrotfiguren ganzheitlich miteinander vernetzt sind./25/ Dies könnte ein Hinweis darauf sein, daß vieles, was wir in der Natur sehen, ebenfalls unsichtbar miteinander vernetzt ist./26/ Fraktale wie die Mandelbrotmenge offenbaren uns sowohl Komplexität als auch Einfachheit. Sie zeigen auf, daß es der fortgesetzten Iteration bedarf, um komplexe Strukturen zu erzeugen. Die Mandelbrotmenge weist Merkmale der Universalität auf, wobei das Innere ohne Struktur ist, während die Grenze unendlich vielfältige Formen aufweist.

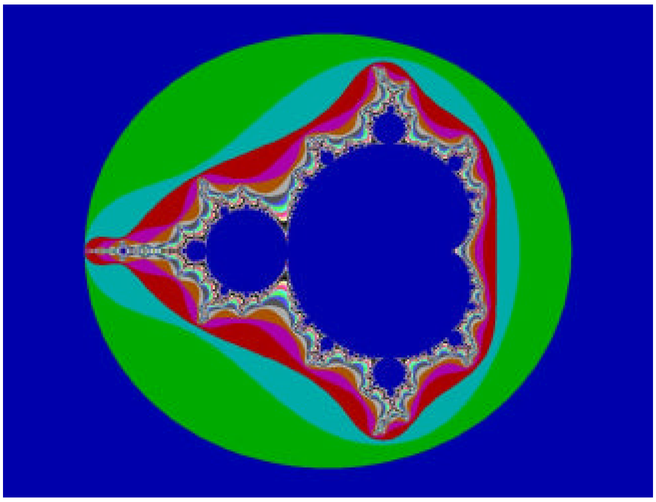

Abb. 2.39: Mandelbrotmenge

Fraktale können noch realistischer die Natur abbilden, wenn bei den verschiedenen Iterationsstufen unterschiedliche Iterationsverfahren benutzt werden. Der Biomathematiker **Prusinkiewicz** fand heraus, daß es einen Kontext zwischen der bei Fraktalen auftretenden Selbstähnlichkeit und den Wachstumsregeln der Natur gibt./27/ Michael **Barnsley** entwickelte ein einfaches Verfahren, um die Codes zu erzeugen, die für die Erzeugung komplexer Formen wie Ahorn- oder Farnblätter notwendig sind. Hierbei nutzt er unterschiedliche Transformationen von Streckungen und Schrumpfungen, die er iterativ auf die Bildpunkte anwendet./28/

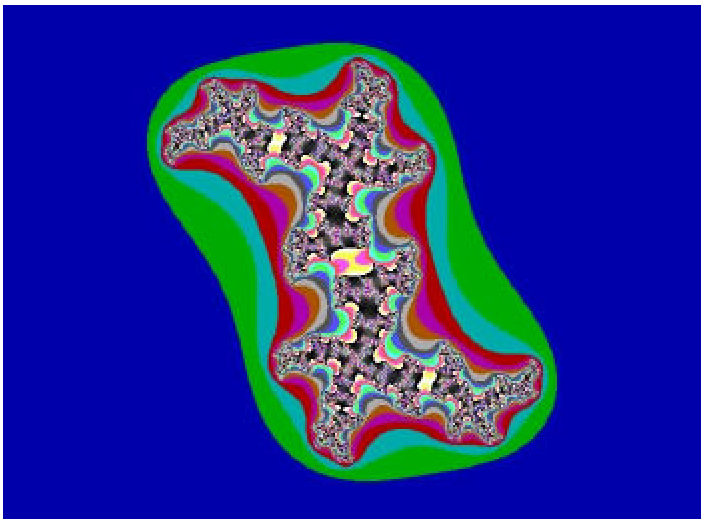

Abb. 2.40: Julia-Menge

- Seltsame Attraktoren

Prigogine definiert Attraktor als Zustand oder Verhalten, auf das die Entwicklung eines dissipativen Systems zusteuert./29/ Attraktoren sind sich durch Phasenübergänge wandelnde Strukturen, wobei das systemische Verhalten um so einfacher wird, je niedriger die Dimension des Attraktors ist. In Zustandsräumen mit drei und mehr Dimensionen treten Attraktortypen mit chaotischer Bewegung auf; diese werden "Seltsame Attraktoren" ("strange attractors") genannt. Damit man von einem Seltsamen Attraktor sprechen kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein: (1) alle Trajektorien bleiben innerhalb einer Region, dem sogenannten Phasenraum, (2) sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und (3) der Attraktor kann nicht in zwei oder mehr Teile aufgespalten werden./30/

Kolmogorow, **Arnold** und **Moser** bewiesen in ihrem sogenannten KAM-Theorem/31/, daß die Bahntrajektorie im Phasenraum empfindlich von den gewählten Anfangsbedingungen abhängig ist. Da es Punkte im Phasenraum gibt, die ein Seltsamer Attraktor nicht erreichen kann, sieht es so aus, als gäbe es eine Äquivalenz von formalen Systemen im Sinne Gödels und den dynamischen Systemen im Sinne Rösslers:/32/

"Chaos implies truth, in the sense that a world without strange attractors...would be very impoverished in the number of mathematical theorems that could be proved...Whatever real-world truths might exist, the overwhelming majority of them cannot be the counterparts of theorems in any formal system...The existence of strange attractors allows us to hold out the hope that he gap between proof and truth can at least be narrowed - even if it can never be completely closed."

Wegen des Prinzips des schwachen Determinismus sind im zweidimensionalen Phasenraum der Punktattraktor und der Grenzzyklus die einzigen möglichen Attraktortypen. Jedes beliebig kleine Gebiet eines Systems, in dem sich ein fraktaler Attraktor befindet, weist die gleiche komplexe Struktur auf./33/ Während die fraktale Dimension die Geometrie beschreibt, werden durch die Lyapunov-Exponenten die dynamischen Eigenschaften von Trajektorien der Attraktoren beschrieben./34/35/ Hierbei können unterschiedliche Arten von Attraktoren auftreten, wie beispielsweise der Grenzzyklus oder der Seltsame Attraktor. Grenzzyklen haben hierbei die Fähigkeit durch Rückkopplung Veränderungen zu widerstehen. Nach Peitgen schließen sich Stabilität und Chaos nicht aus, da ein System chaotischen Veränderungen unterliegen kann, auch wenn es immer wieder auf denselben stabilen Attraktor zustrebt./36/ Er definiert einen Seltsamen Attraktor folgendermaßen:/37/

"Strange attractors are those patterns which characterize the final state of dissipative systems that are highly complex and show all the signs of chaos...strange attractors are the point where chaos and fractals meet in an unavoidable and most natural fashion: as geometrical patterns, strange attractors are fractals; as dynamical objects, strange attractors are chaotic."

Die komplexen Strukturen eines chaotischen Attraktors entstehen aus der Streckung und Stauchung eines Volumenelementes und der anschließenden Faltungen in Folge der Nichtlinearität./38/ Hierbei ist die Streckung für die Sensitivität der Anfangsbedingungen und die Stauchung für die Musterbildung des chaotischen Datensatzes verantwortlich./39/ Seltsame Attraktoren sind effiziente Mischer und verantwortlich für das

Deterministische Chaos und die Unberechenbarkeit - sowie vielleicht auch für die Informationserzeugung.

Alle bekannten Seltsamen Attraktoren sind zwar Fraktale, jedoch sind nicht alle fraktalen Attraktoren seltsam. Seltsame Attraktoren verkörpern nach **Rössler** das Selbstorganisationsprinzip der Welt./40/ Er kam beim Zusehen einer Knetmaschine für Teig auf die Idee, die Bewegungsgleichungen zweier benachbarter Rosinen aufzuschreiben und fand hierbei den nach ihm benannten Seltsamen "Rössler-Attraktor" (siehe Abbildung 2.41). Diesen Attraktor, der durch das nachfolgende Gleichungssystem (sogenanntes Rössler-Band) beschrieben wird, findet man bei der Turbulenz von Flüssigkeiten oder auch in chemischen Reaktionen:/41/

v' = - du + fv - ez

u' = + hv

z' = + b + gz (v-c)

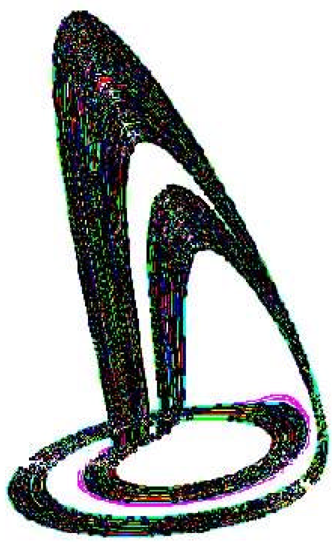

Abb. 2.41: Rössler-Attraktor/42/

Die Hirnaktivität weist im Tiefschlaf Züge des Deterministischen Chaos auf und läßt sich durch einen fraktalen Attraktor von mindestens fünf unabhängigen Variablen charakterisieren./43/ Die chaotischen Orbits Seltsamer Attraktoren werden durch die Topologie untersucht./44/ Die

Verbindung zwischen dynamischen Systemen und der Topologie besteht durch die Veranschaulichung sämtlicher Verhaltensweisen eines Systems durch geometrische Konturen./45/ Die Topologie geht davon aus, daß alle Töpfe mit zwei Henkeln die gleiche Form haben, da diese unter der Voraussetzung von unendlicher Flexibilität/46/ und Kompressibilität stetig ineinander umgeformt werden können./47/

- Fraktale erlauben, die Selbstähnlichkeit komplexer Strukturen in unterschiedlichen Maßstäben zu erkennen.

- Fraktale ermöglichen es, räumliche Strukturen und Organisationsmuster besser zu verstehen.

- Fraktale stehen außerhalb der euklidischen Geometrie und haben gebrochenrationale Dimensionen.

- Fraktale verdeutlichen, daß wir unsere Wirklichkeit als aus rekursiv verschachtelten Welten zusammengesetzt betrachten können, die in den jeweiligen Rekursionsstufen selbstähnlich sind.

- Fraktale und Chaosforschung sind jeweils für den anderen Forschungszweig wichtige Gebiete, um dessen Phänomene zu erklären. Durch beide Gebiete wird sozusagen eine Kopplung von Zeit- und Raumproblematiken vollzogen.

- Fraktale und Chaosforschung zeigen uns die holographischen Verbindungen von Raum und Zeit für komplexe Systeme.

- Fraktale und Chaosforschung verdeutlichen, daß es insbesondere von der Wahl der Anfangsbedingungen abhängt, wie sich komplexe Systeme und Strukturen entwickeln.

- Attraktoren sind die sich stabilisierenden Strukturen von nichtlinearen Systemen.

- Attraktoren verkörpern das Selbstorganisationsprinzip unserer Welt.

- Attraktoren haben in jedem beliebig kleinen Gebiet die gleiche komplexe Struktur.

- Seltsame Attraktoren mit chaotischen Bewegungen hängen sensitiv von den Anfangsbedingungen ab.

Abb. 2.42: Bedeutung von Fraktalen und Attraktoren

- Lyapunov-Exponenten

Mit Lyapunov-Exponenten wird das durchschnittliche Wachstum von infinitesimal kleinen Fehlern in den Anfangsbedingungen quantifiziert./48/ Ist die Summe aller LyapunovExponenten größer Null, so liegen instabile Systeme mit stochastischem oder zufälligem Verhalten vor, während es sich um konservative Systeme/49/ handelt, wenn die Summe aller Exponenten gleich Null ist./50/ Für die Existenz von Seltsamen Attraktoren ist es notwendig, daß die Summe aller Exponenten kleiner Null ist, wobei man hier von dissipativen Systemen spricht. Diese sind, anders als konservative Systeme, asymptotisch stabil, da Störungen nach genügend langer Zeit ausgedämpft werden./51/ Während bei dissipativen Systemen das Phasenraumvolumen schrumpft, bleibt es bei konservativen Systemen (Liouville-Theorem) konstant.

Durch die Lyapunov-Exponenten ist es möglich, die kollidierenden Auswirkungen der Faltung, Streckung und Pressung im Phasenraum eines Attraktors zu messen. Sie stellen somit ein berechenbares Maß für die Abschätzung der Stochastizität dynamischer Systeme dar und sind ein Maß, wie schnell sich benachbarte Trajektorien voneinander entfernen, d. h. Korrelationen im System abgebaut werden und sich die Wirkungen von kleinen Störungen ausbreiten. Mit Lyapunov-Exponenten lassen sich auch Turbulenzphänomene auf Grundlage des Grades ihrer Ordnung und Unordnung vergleichen. Positive Lyapunov-Exponenten sind zwar notwendig, keineswegs aber hinreichend für das Auftreten von Chaos. Wenn Chaos auftritt, werden sie zunehmend positiv./52/ Gemäß ihren Lyapunov-Exponenten lassen sich nachfolgende Attraktortypen identifizieren:/53/

Art des Attraktors:	**Lyapunov-Exponenten**
1) Stabiler Fixpunkt:	**alle Lyapunov-Exponenten negativ; zeitunabhängiger stationärer Zustand**
2) Grenzzyklus:	**ein Lyapunov-Exponent verschwindet, alle übrigen sind negativ; periodische Bewegung**
3) Stabiler n-Torus:	**n-Lyapunov-Exponenten verschwinden, alle übrigen sind negativ; fastperiodische Bewegung**
4) Seltsamer Attraktor:	**ein Lyapunov-Exponent ist positiv, ein Lyapunov-Exponent verschwindet, alle übrigen sind negativ; geometrische Struktur mit fraktaler Dimension**
5) Hyperchaos:	**zwei Lyapunov-Exponenten sind positiv, ein Lyapunov-Exponent verschwindet, alle übrigen sind negativ**

Tab. 2.12: Attraktortypen

Im nächsten Abschnitt möchte ich die Kolmogorow-Sinai-Entropie, ein Maß für die Vorhersagezeit von Abläufen einführen. Ausnahmsweise möchte ich hier den Entropie-Begriff nutzen, da es sich um eine dynamische Interpretation handelt.

- Kolmogorow-Sinai-Entropie

Die Dynamik eines Systems, also die zeitliche Entwicklung seiner Variablen, wird üblicherweise in einem mehrdimensionalen abstrakten Raum - dem Phasenraum - dargestellt. Die Achsen dieses Phasenraumes sind die Variablen des Systems, so daß seine Dimension mit der Anzahl der Variablen identisch ist. Die Untersuchung von Störungen erfolgt durch die sogenannte Stabilitätsanalyse. Die entscheidende Größe hierbei sind die sogenannten Lyapunov-Exponenten, die zeigen, wie schnell zwei Lösungen, die sich nur um einen geringen Betrag (eine Störung) unterscheiden, konvergieren oder divergieren. Ein positiver Exponent kennzeichnet die Tatsache, daß Störungen vergrößert, während sie bei negativem Exponent ausgedämpft werden. Hierbei heißt die Summe aller positiven Exponenten dynamische Entropie oder Kolmogorov-Sinai-Entropie K/54/, die nicht zu verwechseln ist mit dem Längenfaktor K bei Shannon. Dynamische Systeme können somit folgendermaßen klassifiziert werden:/55/

Kolmogorov-Entropie K	**Korrelationszeit t**
Deterministische Systeme: K = 0	**t -> unendlich**
Chaotische Systeme: K > 0/56/	**t > 0**
Zufällige Systeme: K -> unendlich	**t = 0**

Eine positive und endliche Kolmogorov-Sinai-Entropie ist notwendig und hinreichend für Deterministisches Chaos./57/ Ihr Kehrwert K-1 definiert ein Maß für das Zeitintervall dt, nach dem eine Vorhersage über den Zustand des Systems aus endlich genau bekannten Anfangsbedingungen nicht mehr sinnvoll ist. Falls die Produktion potentieller Information Null wird (K=0), ist die Vorhersagezeit K-1 prinzipiell unendlich lang/58/, wobei die Vorhersagegenauigkeit eines Beobachters konstant bleibt und die zugehörige Dynamik reversibel ist. Von Interesse für Interfaces ist, daß deterministisch-chaotische Systeme mit Hilfe der Kolmogorow-Sinai-Entropie auch informationstheoretisch interpretiert werden können:/59/

K>0: Informationsproduzierende Systeme (notwendige und hinreichende Bedingung für Chaos) - Dynamik irreversibel

K=0: Informationskonservierende Systeme - Dynamik reversibel

Ein dissipatives System kann nur dann intern Information mit einer Rate K (der dynamischen Entropie) erzeugen/60/, wenn es chaotische Attraktoren besitzt, da nur dann positive Exponenten existieren, die zur Definition von K erforderlich sind./61/ Hierbei verringert sich die Information eines Beobachters nach einer Zeit 1/K so weit, daß seine Kenntnis über den Zustand des Systems nur noch sehr ungenau ist.

- Rekursive Strukturen, wie diese bei Fraktalen auftreten, können bezogen auf Organisationen ein großes Machtpotential aufbauen.

- Machtpotentiale und Attraktoren sind wechselseitig miteinander verbunden.

- Neue Attraktoren bilden Anziehungspunkte für komplexe Systeme und somit für den Aufbau neuer Machtpotentiale.

- Freiheit im Rahmen von Attraktoren tritt immer dann auf, wenn Phasenübergänge vollzogen werden.

Abb. 2.43: Konsequenzen für Macht und Freiheit

Wissenschaftliche Kontexte:	Auswirkungen auf das Management:
- Fraktale haben eine feingliedrige Struktur, d.h. eine hohe Detaillierung in kleinen Maßstäben.	- Fraktale Märkte bedeuten, daß Produkte individuell auf Kunden zugeschnitten werden müssen.
- Die Grenze von Fraktalen weist unendlich vielfältige Formen auf.	- Unternehmen mit ihren Niederlassungen und Regional-Zentren haben fraktale Grenzen, d.h. die Marktpenetration ist einer ständigen Veränderung ausgesetzt.
- Zwischen der bei Fraktalen auftretenden Selbstähnlichkeit und den Wachstumsregeln der Natur gibt es gemeinsame Kontexte.	- Unternehmen, die in denselben Märkten operieren, sind in ihren Strukturen selbstähnlich.
- Fraktale können für den Aufbau virtueller Landschaften genutzt werden.	- Die Herausbildung virtueller Marktplätze forciert die fraktale Bilderzeugung.
- Die rekursiven Gesetze für Fraktale können auch für den Aufbau von Kommunikationsstrukturen genutzt werden. (siehe Kapitel 4.3.3.2)	- Rekursivität spielt beim Wachstum von Unternehmen eine entscheidende Rolle, da hierbei erfolgreiche Codierungen in die Weltmärkte getragen werden.
- Attraktoren sind Strukturen, die sich durch Phasenübergänge wandeln.	- Im Management geht es vor allem um die Herausbildung neuer Attraktoren, die neue Geschäftsfelder und Märkte repräsentieren (siehe Kapitel 4.3.4.2).
- Chaotische Attraktoren sind die Voraussetzung für das Erzeugen neuer Informationen.	- Attraktoren sind die Voraussetzung für Innovationen, die neue Problemlösungen ermöglichen.
- Attraktoren bilden die Synchronisation unterschiedlicher Teilnehmerperspektiven.	- Management muß im Unternehmen und in Märkten die Attraktoren suchen, die Kundenprobleme lösen und Produktentwicklungen voranbringen.

Abb. 2.44: Konsequenzen für das Endo-Management

1 Vgl. Peitgen (Fractals), 63.

2 Benoit Mandelbrot hatte ursprünglich Luftfahrt studiert. Er wurde vor allem von John v. Neumann gefördert.

3 Vgl. Gleick (Chaos), 128.

4 Vgl. Briggs (Welten), 23.

5 Falconer (Fractal), XXf.

6 GEO-Wissen (Kreativität), 55.

7 Vgl. Peat (Chaos), 155.

8 Vgl. Peitgen (Fractals), 204f.

9 Die Kochsche Schneeflocke ist somit ein anschauliches Modell für die Unendlichkeit einer Küstenlinie in Abhängigkeit vom jeweiligen Betrachtungsmaßstab.

10 Kochsche Schneeflocke und Himalaja fotografiert aus der Umlaufbahn. Vgl. Peitgen (Fractals), 91.

11 Vgl. Briggs (Welten), 57.

12 Vgl. Peat (Chaos), 153.

13 Vgl. Briggs (Welten), 70.

14 Vgl. Peitgen (Mathematik), 115.

15 Vgl. Falconer (Fractal), XXI.

16 Vgl. Cramer (Chaos), 201.

17 Vgl. Briggs (Welten), 34.

18 Vgl. Briggs (Welten), 38.

19 Vgl. Briggs (Welten), 69.

20 Hofstadter (Gödel), 161.

21 Die komplexen Zahlen beschreiben Vorstellungen der Wirklichkeit, keine physischen Wirklichkeiten.

22 Komplexe Zahlen setzen sich aus einem Realteil und einem Imaginärteil zusammen. Hierbei ist die imaginäre Einheit i (i2 = -1) von besonderer Bedeutung, da diese ein höchst effizientes Zahlensystem

ermöglicht. Die Quantenmechanik war die erste physikalische Theorie, die zwingend die Einführung der imaginären Einheit in ihren Formalismus erforderte. Vgl. Primas (Naturwissenschaften), 225.

23 Jede komplexe Zahl besteht aus einem Real- und Imaginärteil mit folgender Form: Z=y + ix, der in der komplexen Ebene einem Punkt entspricht. Die komplexe Zahl scheint in gewissem Sinne die Existenz von physischer und virtueller Wirklichkeit zu repräsentieren.

24 Vgl. Peitgen (Fractals), 844f.

25 Vgl. Briggs (Welten), 80.

26 Wenn der Startpunkt z0 der Mandelbrotmenge innerhalb der Mandelbrotmenge liegt, offenbart die Dynamik eine geordnete Trajektorie. Liegt dieser dagegen außerhalb von M, so offenbart sich eine wilde und ungeordnete Trajektorie, die über die komplexe Ebene wandert. Für C = -1 entsteht das sogenannte Julia-Set.

27 Vgl. Briggs (Welten), 87.

28 Vgl. Briggs (Welten), 86.

29 Vgl. Prigogine (Paradox), 99.

30 Vgl. Creedy (Chaos), 22.

31 Kolmogoroff ging von der These aus, daß bereits eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden ausreicht, um den Zustand einer turbulenten Flüssigkeit zu beschreiben.

32 Vgl. Casti (Complexification), 148f.

33 Vgl. Prigogine (Paradox), 106.

34 Vgl. Peitgen (Fractals), 721.

35 Die fraktale Dimension bildet eine strukturelle Invariante, während Lyapunov-Exponenten dynamische Invarianten repräsentieren. Vgl. Kurths (Complexity), 219.

36 Vgl. Rötzer (Endophysik), 104.

37 Vgl. Peitgen (Fractals), 656.

38 Vgl. Leven (Chaos), 89.

39 Vgl. Gilmore (Chaos), 211.

40 Vgl. Gespräch mit Rössler, 1995.

41 Vgl. Goodwin (Dynamics), 103.

42 Bewegungen von Punkten im Einfluß Seltsamer Attraktoren zeigen chaotische und unendlich komplexe Bewegungen. Die wechselnde Position und die Geschwindigkeit von Teilchen beim Auftreten von Deterministischem Chaos lassen sich nur mit Hilfe von Seltsamen Attraktoren beschreiben, die somit eine Art makroskopisches Pendant zur Heisenbergschen Unschärferelation im Mikrokosmos bilden.

43 Vgl. Prigogine (Paradox), 117.

Das menschliche Gehirn scheint somit eine Art Metafraktal zu bilden mit einer extremen Vernetzungs-dichte. Wenn durch die Zahl 210.000 ein 104-dimensonaler Raum aufgespannt wird und die Zahl der Knoten in etwa dem des menschlichen Gehirns entspricht, so kann man annehmen, daß das Gehirn einen Seltsamen Attraktor besitzt.

44 Topologie wird das Teilgebiet der Mathematik genannt, das die Anordnungen und Beziehungen zwischen Punktmengen von selbstähnlichen geometrischen Figuren berücksichtigt.

45 Vgl. Gleick (Chaos), 73.

46 Die Topologie unterscheidet nicht zwischen verschiedenen Küstenlinien, da diese durch Transformation ineinander übergeführt werden können.

47 Vgl. Mandelbrot (Geometrie), 28.

48 Vgl. Peitgen (Fractals), 516.

49 Da hierbei die Störungen global weder gedämpft noch verstärkt werden, können diese als stabil bezeichnet werden.

50 Vgl. Atmanspacher (Metis), 185.

51 Vgl. Atmanspacher (Metis), 185.

52 Streckung bedeutet hierbei, daß ein Exponent größer als Null ist, während Pressung (Kontraktion)

bedeutet, daß ein Exponent kleiner als Null ist.

53 Vgl. Thomas (Chaos), 182.

54 Vgl. Atmanspacher (Metis), 184.

55 Vgl. Scheingraber (Chaos-Forschung), Vortragsmanuskript.

56 K hat beim Lorenz-Attraktor den Wert 0,13 und beim Rössler-Attraktor den Wert 0,011.

57 Vgl. Atmanspacher (Metis), 78.

58 Vgl. Atmanspacher (Metis), 81.

59 Atmanspacher (Metis), 78.

60 Vgl. Atmanspacher (Metis), 188.

61 Hierbei ist es von besonderem Interesse zu untersuchen, inwieweit es Attraktoren in Cybernetzen wie dem Internet gibt und wie diese die Informationserzeugung beeinflussen. Siehe hierzu auch Kapitel 4.3.3.2 und Kapitel 4.3.4.2.